جبر 2 (عملي)

المحاضرة الخامسة (عملي)

تمرين :
ليكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

والمطلوب :

1) : أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A

الحل : أولاً نوجد كثير الحدود $d(x)_A = |\lambda E - A|$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الثالث

$$= (-1)^{3+3} (\lambda+5) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 \\ 3 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+5) \left((\lambda-4)(\lambda+5) - (3)(-6) \right)$$

$$= (\lambda+5) (\lambda^2 + 5\lambda - 4\lambda - 20 + 18)$$

$$= (\lambda+5) (\lambda^2 + \lambda - 2)$$

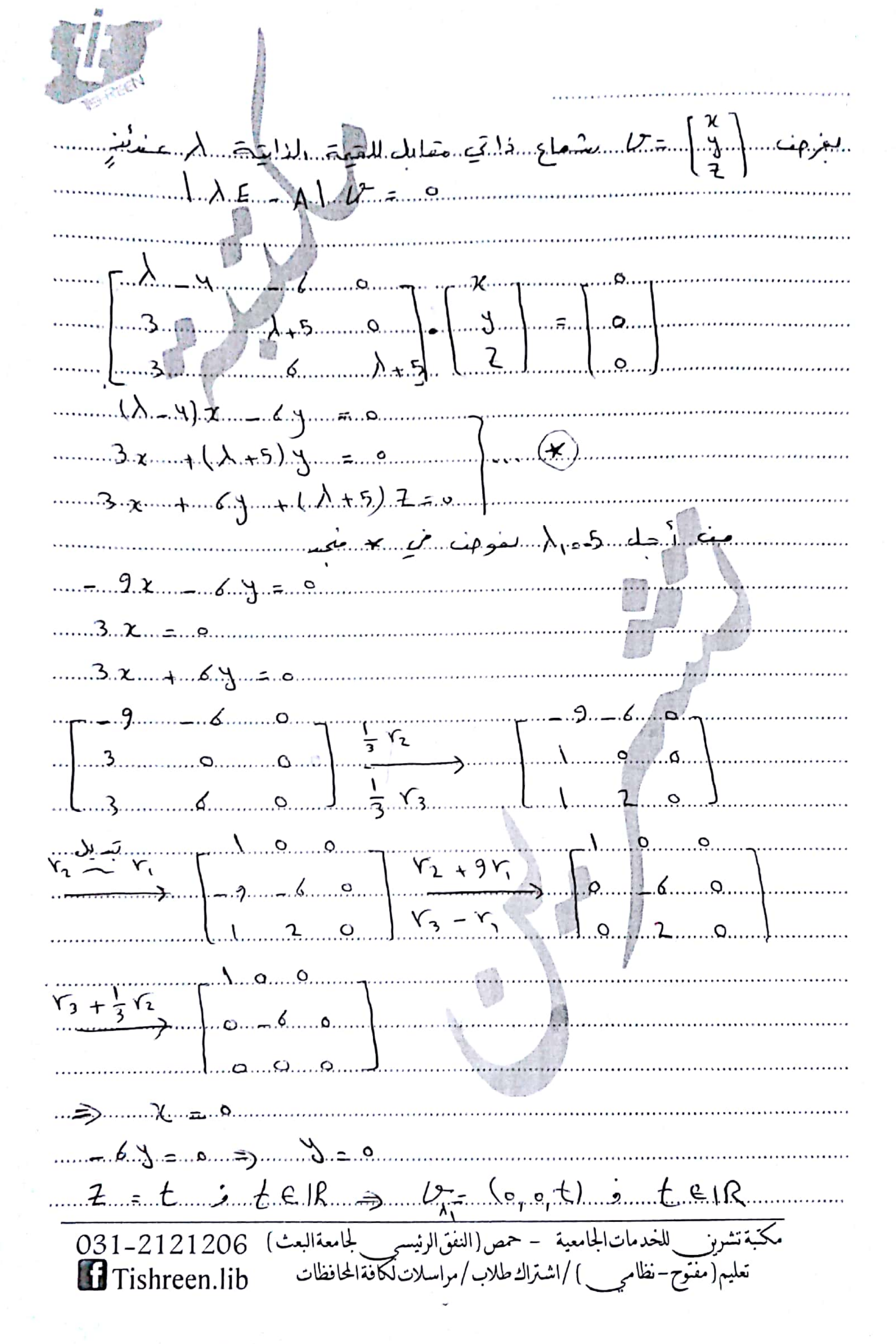
$$d(x)_A = (\lambda+5) (\lambda+2)(\lambda-1)$$

ولدينا $(\lambda+5) = 0 \Rightarrow \lambda = -5$

$(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

إيجاد الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية



نفرض $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي مقابل للقيمة الذاتية λ عندئذٍ

$$|\lambda E - A| v = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda-4)x - 6y &= 0 \\ 3x + (\lambda+5)y &= 0 \\ 3x + 6y + (\lambda+5)z &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (*)$$

من أجل $\lambda_1 = -5$ نعوض في $*$ نجد

$$-9x - 6y = 0$$

$$3x = 0$$

$$3x + 6y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} r_3]{\frac{1}{3} r_2} \begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \sim r_1 \text{ تبديل}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 9r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + \frac{1}{3} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$-6y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$z = t \ ; \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow v_{\lambda_1} = (0, 0, t) \ ; \ t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = t(0,0,1)$; $t \in \mathbb{R}$

من أجل $\lambda_2 = -2$ بعوض في * فنجد

$$\begin{aligned} -6x - 6y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \\ 3x + 6y + 3z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + \frac{1}{2}r_1]{r_2 + \frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -6x - 6y &= 0 \\ 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

نفرض $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3y + 3t = 0 \Rightarrow 3y = -3t \Rightarrow y = -\frac{3}{3}t$

$\Rightarrow y = -t$

ولدينا $-6x - 6y = 0$

$\Rightarrow -6x - 6(-t) = 0 \Rightarrow -6x + 6t = 0$

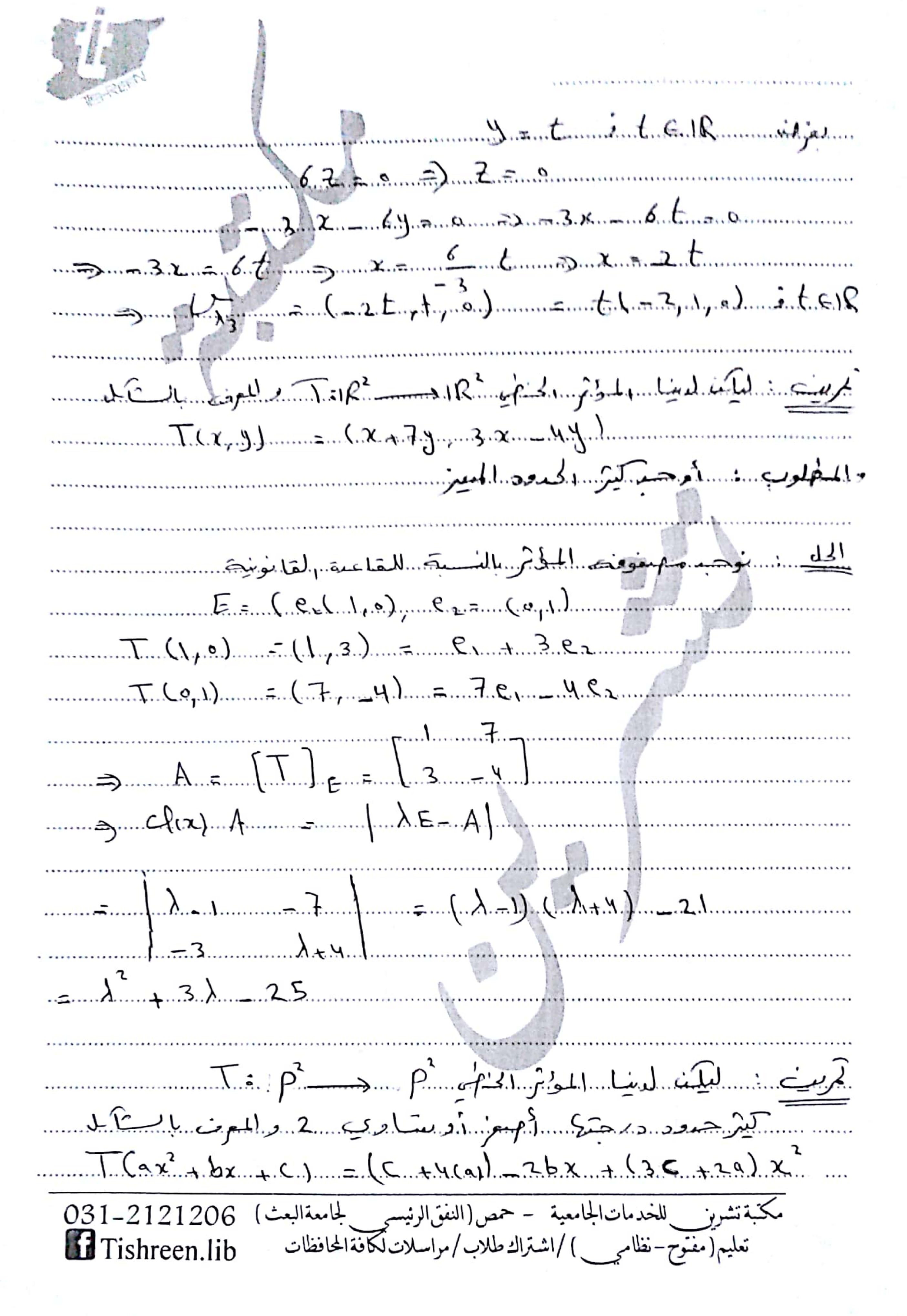
$\Rightarrow -6x = -6t \rightarrow x = \frac{-6}{-6}t = t$

$\Rightarrow V_{\lambda_2}(t, -t, t) = t(1, -1, 1)$; $t \in \mathbb{R}$

من أجل $\lambda = 1$ بعوض في * فنجد

$$\begin{aligned} -3x - 6y &= 0 \\ 3x + 6y &= 0 \\ 3x + 6y + 6z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -3x - 6y &= 0 \\ 6z &= 0 \end{aligned}$$



نعرض $y = t \ ; \ t \in \mathbb{R}$

$6z = 0 \Rightarrow z = 0$

$-3x - 6y = 0 \Rightarrow -3x - 6t = 0$

$\Rightarrow -3x = 6t \Rightarrow x = \frac{6}{-3} t \Rightarrow x = -2t$

$\Rightarrow V_{\lambda_3} = (-2t, t, 0) = t(-2, 1, 0) \ ; \ t \in \mathbb{R}$

تمرين: ليكن لدينا المؤثر الخطي $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ والمعرف بالشكل

$T(x, y) = (x + 7y, 3x - 4y)$

المطلوب: أوجد كثير الحدود المميز

الحل: نوجد مصفوفة المؤثر بالنسبة للقاعدة القانونية

$E = (e_1 (1, 0), e_2 = (0, 1))$

$T(1, 0) = (1, 3) = e_1 + 3e_2$

$T(0, 1) = (7, -4) = 7e_1 - 4e_2$

$\Rightarrow A = [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow C(x)_A = |\lambda E - A|$

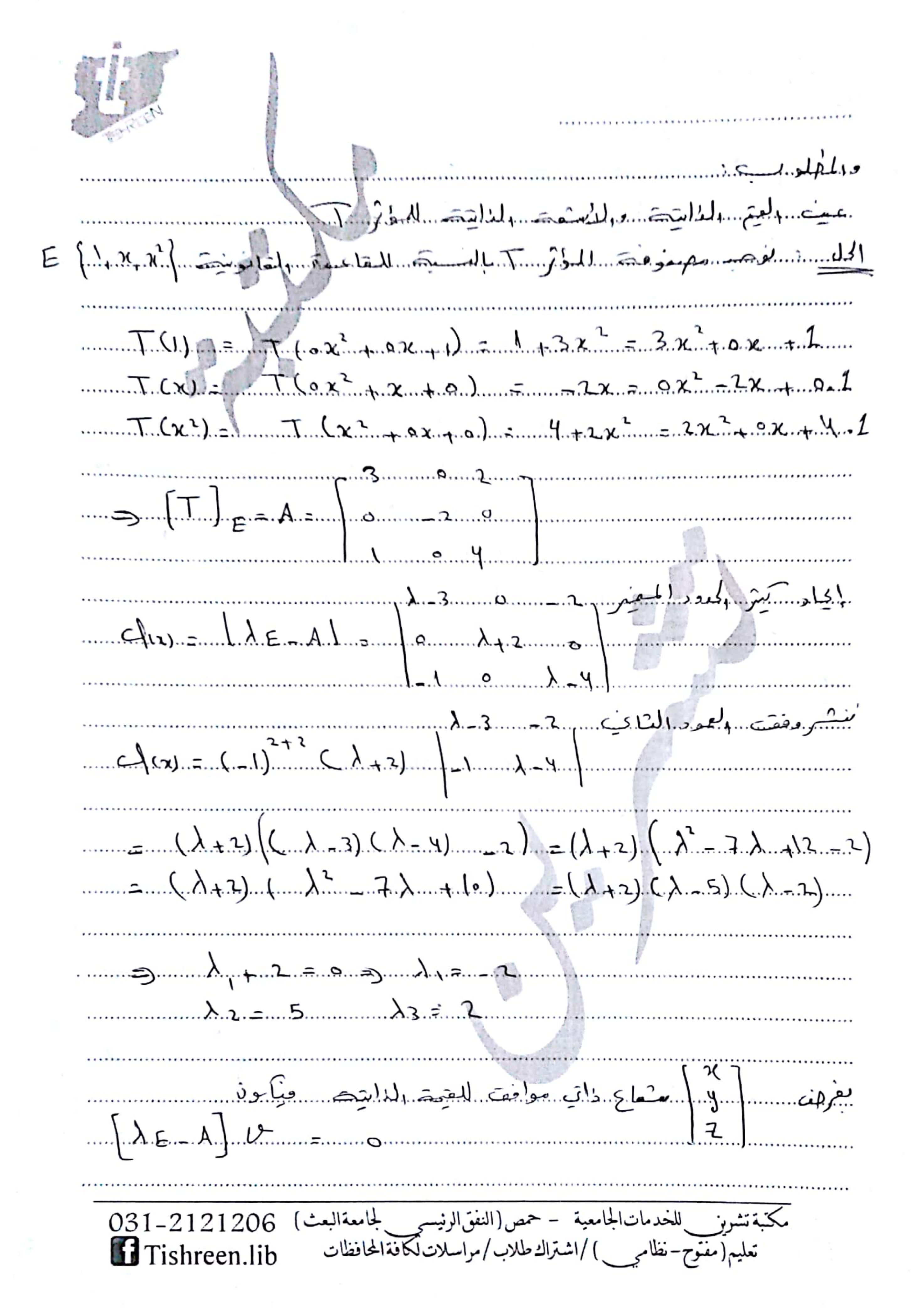
$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -7 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 21$

$= \lambda^2 + 3\lambda - 25$

تمرين: ليكن لدينا المؤثر الخطي $T : P^2 \longrightarrow P^2$

كثير حدود درجته أصغر أو يساوي 2 والمعرف بالشكل

$T(ax^2 + bx + c) = (c + 4(a)) - 2bx + (3c + 2a)x^2$



والمطلوب:

عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر T

الحل: نوجد مصفوفة المؤثر T بالنسبة للقاعدة القانونية $E\ \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = T(0x^2 + 0x + 1) = 1 + 3x^2 = 3x^2 + 0x + 1$$
$$T(x) = T(0x^2 + x + 0) = -2x = 0x^2 - 2x + 0.1$$
$$T(x^2) = T(x^2 + 0x + 0) = 4 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 4.1$$

$$\Rightarrow [T]_E = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

إيجاد كثير الحدود المميز

$$c(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الثاني

$$c(x) = (-1)^{2+2} (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\big((\lambda-3)(\lambda-4) - 2\big) = (\lambda+2)(\lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = (\lambda+2)(\lambda-5)(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = 2$$

نفرض $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية فيكون

$$[\lambda E - A]\, v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} (\lambda-3)x - 2z &= 0 \\ (\lambda+2)y &= 0 \\ -x + (\lambda-4)z &= 0 \end{aligned}\right] \quad (*)$$

من أجل $\lambda_1 = -2$ نعوض في $(*)$

$$\begin{aligned} -5x - 2z &= 0 \\ 0y &= 0 \\ -x - 6z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{5} r_1}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -5x - 2z &= 0 \\ -\frac{28}{5} z &= 0 \end{aligned}$$

نفرض $y = t$; $t \in \mathbb{R}$

ولدينا $-\frac{28}{5} z = 0 \Leftarrow z = 0$

ومنه $-5x - 2(0) = 0 \Rightarrow -5x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = t(0,1,0) \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

من أجل $\lambda_2 = 5$ نعوض في $(*)$ نجد

$$\begin{aligned} 2x - 2z &= 0 \\ 7y &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2} r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ 7y = 0 \end{array}$$

نفرض $z = t \; ; \; t \in IR$ و $y = 0$

و $x = t$

$\Rightarrow v_{\lambda_2} = t(1, 0, 1) \; ; \; t \in IR$

مناقشة $\lambda_3 = 2$ نعوض في $(*)$ فنجد

$$\begin{array}{l} -x - 2z = 0 \\ 4y = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -x - 2z = 0 \\ 4y = 0 \end{array}$$

نفرض $x = t \; ; \; t \in IR$

و لدينا $y = 0$ و $-t - 2z = 0 \Rightarrow 2z = -t$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} t$

$\Rightarrow v_{\lambda_3} = t\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \; ; \; t \in IR$

«انتهت المحاضرة الخامسة»

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

إعداد: فاطمة الشميني